Automatsko rezonovanje – beleške sa predavanja Teorije prvog reda i SMT

Milan Banković

*Matematički fakultet,
Univerzitet u Beogradu

Prolećni semestar 2024/25.

Pregled

Uvod i motivacija

Logika prvog reda i jednakosna logika

- U opštoj logici prvog reda smo sve simbole iz signature mogli da interpretiramo na proizvoljan način
- U logici sa jednakošću smo imali predikatski simbol jednakosti čija je interpretacija bila fiksirana, dok su se ostali simboli mogli interpretirati proizvoljno
- Simbol jednakosti se uvek interpretirao kao jednakost na odabranom domenu, tj. razmatrali smo samo normalne interpretacije
- Drugim rečima, jednakosna logika se može razumeti kao semantičko suženje logike prvog reda, jer ograničavamo skup interpretacija koje razmatramo
- Kažemo i da je simbol jednakosti bio interpretiran, dok su ostali simboli bili neinterpretirani ili slobodni simboli

Uvod i motivacija

Aksiome jednakosti – ponovo

- Drugi pogled na jednakosnu logiku je bio sintaksno-deduktivni: razmatrali smo formule koje su bile deduktivna posledica aksioma jednakosti
- Logičko opravdanje za ovakav pristup bila je činjenica da je formula F bila valjana u jednakosnoj logici akko je bilo moguće dokazati je polazeći od aksioma jednakosti
- Prednost sintaksno-deduktivnog pristupa je u tome što smo mogli da koristimo postojeće deduktivne sisteme i procedure u opštoj logici prvog reda, uz dodatak aksioma jednakosti
- Ipak, u praksi je bilo efikasnije koristiti specijalizovane procedure za rezonovanje sa jednakošću

Uvod i motivacija

Uopštenje?

- Uzmimo proizvoljan skup rečenica Ax nad izabranom signaturom $\mathcal{L}$
- Sintaksno-deduktivni pristup: posmatrajmo skup svih formula $\mathcal{T}$ koje su deduktivna posledica skupa Ax
- Semantički pristup: posmatrajmo skup svih $\mathcal{L}$-struktura $\mathcal{M}$ u kojima su tačne sve formule iz Ax
- Tada će i svaka formula iz $\mathcal{T}$ biti tačna u svim strukturama iz $\mathcal{M}$ (zbog saglasnosti deduktivnog sistema)
- Obrnuto: svaka formula koja je tačna u svim strukturama iz $\mathcal{M}$ biće dokaziva iz Ax (zbog potpunosti deduktivnog sistema)
- Skup $\mathcal{T}$ nazivaćemo teorijom prvog reda zadatom skupom aksioma Ax
- Strukture iz $\mathcal{M}$ nazivaćemo modelima teorije $\mathcal{T}$

Teorija prvog reda

Definicija teorije prvog reda

- Teorija $\mathcal{T}$ nad signaturom $\mathcal{L}$ zadata skupom aksioma $Ax(\mathcal{T})$ je skup svih formula F takvih da je $Ax(\mathcal{T}) \vdash F$
- Formule $F \in \mathcal{T}$ zovemo teoremama teorije $\mathcal{T}$ (u oznaci $\vdash_{\mathcal{T}} F$)
- Deduktivna posledica u teoriji (u oznaci $\Delta \vdash_{\mathcal{T}} F$): $Ax(\mathcal{T}) \cup \Delta \vdash F$
- Model teorije: struktura $\mathcal{L}$ u kojoj su sve formule iz $Ax(\mathcal{T})$ tačne
- Formula F je valjana u teoriji $\mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$-valjana, u oznaci $\models_{\mathcal{T}} F$) ako je tačna u svim njenim modelima, tj. ako je $Ax(\mathcal{T}) \models F$
- Formula je zadovoljiva u teoriji $\mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$-zadovoljiva) ako je tačna u bar jednom modelu teorije $\mathcal{T}$, tj. ako je $Ax(\mathcal{T}) \cup \{F\}$ zadovoljiv skup formula
- Logička posledica u teoriji (u oznaci $\Delta \models_{\mathcal{T}} F$): F je tačna u svim modelima teorije $\mathcal{T}$ u kojima su tačne sve formule iz Δ, tj. važi $Ax(\mathcal{T}) \cup \Delta \models F$

Teorija prvog reda

Veza između deduktivnih i semantičkih pojmova

Pod pretpostavkom da je deduktivni sistem koji razmatramo potpun i saglasan, važi:

- $\vdash_{\mathcal{T}} F$ akko $Ax(\mathcal{T}) \vdash F$ akko $Ax(\mathcal{T}) \models F$ akko $\models_{\mathcal{T}} F$
- $\Delta \vdash_{\mathcal{T}} F$ akko $Ax(\mathcal{T}) \cup \Delta \vdash F$ akko $Ax(\mathcal{T}) \cup \Delta \models F$ akko $\Delta \models_{\mathcal{T}} F$
- Rečenica F je $\mathcal{T}$-zadovoljiva akko nije $\models_{\mathcal{T}} \neg F$ tj. akko nije $\vdash_{\mathcal{T}} \neg F$
- $\vdash_{\mathcal{T}} F$ akko je $\neg F$ $\mathcal{T}$-nezadovoljiva

Teorija prvog reda

Osobine teorije prvog reda

- Za teoriju kažemo da je aksiomatska ako je zadata skupom aksioma $Ax(\mathcal{T})$ koji je rekurzivan (odlučiv)
- Za teoriju kažemo da je potpuna ako za svaku rečenicu A važi ili $\vdash_{\mathcal{T}} A$ ili $\vdash_{\mathcal{T}} \neg A$
- Za teoriju kažemo da je konzistentna ako ni za jednu rečenicu A ne važi istovremeno i $\vdash_{\mathcal{T}} A$ i $\vdash_{\mathcal{T}} \neg A$
- Za teoriju kažemo da je odlučiva ako postoji efektivan postupak koji za svaku rečenicu A u konačnom broju koraka ispituje da li je $\vdash_{\mathcal{T}} A$ ili ne

Teorija prvog reda

Mogu se dokazati sledeće važne činjenice

- Teorija je konzistentna akko ima model
- Za svaku konzistentnu teoriju koja ima bar jedan beskonačan model postoje modeli koji su neizomorfni (posledica Skolem-Lovenhajmove teoreme)
- Drugim rečima, u logici prvog reda se ne može postići kategoričnost, tj. ne može se formulisati konzistentna teorija koja ima tačno jedan model (do na izomorfizam). Za to su nam potrebne moćnije logike (poput logike drugog reda)
- Teorija je potpuna akko su joj svi modeli međusobno elementarno ekvivalentni (tj. za svaku rečenicu F važi da je F tačna u jednom modelu akko je tačna u drugom i obratno)
- Potpuna teorija je odlučiva akko je aksiomatska
- Problem ispitivanja $\mathcal{T}$-zadovoljivosti formule F je odlučiv akko je teorija odlučiva u smislu prethodne definicije

Teorija prvog reda

Teorija kao skup modela

- Teorije se obično zadaju aksiomama koje nas ograničavaju na određeni skup modela koje razmatramo, a u kojima su sve aksiome (pa samim tim i teoreme) te teorije tačne
- Obrnuto, teorija se ponekad opisuje i zadavanjem skupa modela unapred
- Ključno pitanje je da li se za ovako zadatu teoriju može formulisati skup aksioma koji određuje upravo taj skup modela
  - na primer, u jednakosnoj logici smo podrazumevali skup svih normalnih modela
  - ipak, nismo mogli aksiomatski da opišemo baš taj skup modela
- Često se fiksira samo jedan model (npr. fiksiramo strukturu realnih brojeva ili strukturu prirodnih brojeva)
  - u takvim situacijama je jasno da ne postoji skup aksioma koji nas može ograničiti samo na taj jedan model, s obzirom na Skolem-Lovenhajmovu teoremu
- Ipak, ako zadata struktura zadovoljava sistem aksioma koji opisuje potpunu teoriju, tada je iz tog skupa aksioma moguće dokazati bilo koje tvđenje koje je tačno u zadatoj strukturi
- U suprotnom, ako ne postoji potpuna aksiomatska teorija čiji je model data struktura, tada će za svaki konzistentan skup aksioma kome je model data struktura postojati tvrđenja koja su tačna u toj strukturi, a koje se ne mogu dokazati iz tih aksioma
  - ovo je slučaj sa strukturom prirodnih brojeva (na osnovu Gedelove teoreme o nepotpunosti aritmetike)

Teorija prvog reda

Teorija prvog reda i jednakost

- Gotovo sve teorije koje su od značaja za razmatranje u matematici podrazumevaju postojanje relacije jednakosti
- Otuda ćemo mi u nastavku podrazumevati da simbol jednakosti uvek postoji, kao i da se interpretira baš kao relacija jednakosti
- Drugim rečima, podrazumevamo da su svi modeli teorije normalni modeli
- Alternativno, možemo podrazumevati da aksiome svake teorije uvek sadrže i aksiome jednakosti, čak i kada to nije eksplicitno navedeno

Primeri teorija prvog reda

Primeri

- Teorija skupova (ZFC) [neodlučiva]
- Peanova aritmetika [neodlučiva] (model $\mathbb{N}$)
- Teorija grupa [neodlučiva]
- Teorija komutativnih grupa [odlučiva]
- Teorija polja [neodlučiva]
- Teorija uredjenih polja [neodlučiva] (modeli $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)
- Teorija realno zatvorenih polja [odlučiva] (model $\mathbb{R}$)
- Teorija algebarski zatvorenih polja [odlučiva] (model $\mathbb{C}$)
- Euklidska geometrija [odlučiva] (model $\mathbb{R}^3$)

Rezonovanje u teoriji

Pristupi

- Opšte metode rezonovanja (poput rezolucije, uz dodate aksiome teorije)
  - Ovaj pristup je često neefikasan
- Specifične metode rezonovanja (posebne procedure koje uzimaju u obzir semantiku interpretiranih simbola teorije)
  - U praksi obično mnogo efikasnije
- Najčešće se dokazivanje teorema vrši pobijanjem, tj. dokazivanjem nezadovoljivosti negiranih formula

Razvoj specifičnih procedura za rezonovanje

Problemi

- Prilikom rezonovanja u teoriji, imamo tri problema koje treba da razmotrimo:
  - Tretman iskazne strukture formule
  - Tretman interpretiranih simbola u teoriji
  - Tretman kvantifikatora
- Raniji pristup za tretman iskazne strukture formule je bio svodjenje na DNF, pa razmatranje svake konjunkcije literala zasebno
- Moderni pristup je da se uposle efikasni SAT rešavači u tu svrhu
- Za tretman funkcijskih i predikatskih simbola teorije implementiraju se posebne procedure (uglavnom za bazni slučaj, tj. za konjunkcije baznih literala)

Rezonovanje u teoriji

Kvantifikatori

- Egzistencijalni kvantifikatori: skolemizacija
- Univerzalne kvantifikatore nije uvek moguće ukloniti
- Rezolucija: teško se kombinuje sa specifičnim procedurama koje uglavnom rade sa baznim formulama
- Neke teorije dopuštaju eliminaciju kvantifikatora
- Najčešći pristup je instanciranje kvantifikatora (zasnovan na Erbranovoj teoremi)
- Ovim se dobijaju bazne formule na koje se primenjuju specifične procedure odlučivanja

Furije-Mockinova procedura

Furije-Mockinova procedura

- Procedura odlučivanja za linearni fragment teorije uredjenih polja
- Modeli ove teorije su $(\mathbb{Q}, +, \leq)$ i $(\mathbb{R}, +, \leq)$ (linearne jednakosti i nejednakosti nad $\mathbb{Q}$ ili $\mathbb{R}$)
- Zasnovana na eliminaciji kvantifikatora

Furije-Mockinova procedura

Furije-Mockinova procedura

- Pretpostavimo da imamo konjunkciju K linearnih ograničenja oblika $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \bowtie b$, gde je $\bowtie \in \{<, >, =\}$.
- Posmatrajmo, proizvoljnu fiksiranu promenljivu x_i. Ukoliko postoji bar jedna jednakost u kojoj se pojavljuje x_i, izrazimo je iz te jednakosti u obliku $x_i = \sum_{j \neq i} c_j x_j + c$
- Sada možemo u svim ostalim ograničenjima x_i zameniti izrazom $\sum_{j \neq i} c_j x_j + c$, a jednakost iz koje je izraženo x_i brišemo.
- Transformisana konjunkcija K' ne sadrži više promenljivu x_i
- Pritom, proizvoljna valuacija promenljivih $\{x_j \mid j \neq i\}$ će zadovoljavati K' akko se može proširiti nekom vrednošću za promenljivu x_i tako da dobijena valuacija zadovoljava originalnu konjunkciju K

Furije-Mockinova procedura

Furije-Mockinova procedura

- Ukoliko se promenljiva x_i ne pojavljuje ni u jednoj jednakosti (već samo u nejednakostima), tada sve nejednakosti koje sadrže x_i transformisati u jedan od oblika $x_i < \sum_{j \neq i} c_j x_j + c$ ili $x_i > \sum_{j \neq i} d_j x_j + d$
- Ako su sve nejednakosti prvog oblika (ili su sve drugog oblika) možemo ih sve obrisati
- U suprotnom, za svaku nejednakost prvog oblika i svaku nejednakost drugog oblika formiramo novu nejednakost $\sum_{j \neq i} d_j x_j + d < \sum_{j \neq i} c_j x_j + c$. Ove nejednakosti dodajemo u konjunkciju, a originalne nejednakosti koje sadrže x_i brišemo
- Slično kao i malopre, dobijena konjunkcije K' će sadržati samo izraze koji ne sadrže x_i
- Takodje, K' će važiti u onim i samo onim valuacijama koje se mogu proširiti nekom vrednošću za x_i tako da bude zadovoljena originalna konjunkcija K

Furije-Mockinova procedura

Furije-Mockinova procedura

- Pretpostavimo sada da imamo rečenicu u preneks normalnoj formi: $Q_1 x_1 . Q_2 x_2 . \ldots Q_n x_n . F$
- Možemo pretpostaviti da je Q_n egzistencijalni kvantifikator
- (Ukoliko Q_n nije egzistencijalni kvantifikator, formulu transformišemo u oblik $Q_1 x_1 . Q_2 x_2 . \ldots \neg \exists x_n . \neg F$)
- Transformišemo formulu F u DNF (prethodno sve nejednakosti oblika $l \leq r$ trasformišemo u $(l < r \vee l = r)$, a sve različitosti $l \neq r$ transformišemo u $(l < r \vee r < l)$)
- Na svaku konjunkciju u DNF-u primenimo prethodni postupak da eliminišemo promenljivu x_n
- Nakon toga se kvantifikator $\exists x_n$ može obrisati
- Postupak nastavljamo sa kvantifikatorom $Q_{n-1} x_{n-1}$ na isti način
- Na kraju dolazimo do formule koja ne sadrži promenljive ni kvantifikatore (bazna formula) koja je tačna akko je polazna formula bila teorema u teoriji uredjenih polja

Furije-Mockinova procedura

Furije-Mockinova procedura

- Opisana procedura se može koristiti i za ispitivanje zadovoljivosti konjunkcije baznih linearnih ograničenja
- Imajući u vidu skolemizaciju, sve (neinterpretirane) simbole konstanti koji se pojavljuju u konjunkciji možemo smatrati egzistencijalno kvantifikovanim promenljivama
- Otuda sve konstante možemo eliminisati jednu po jednu na ranije opisan način

Simpleks metod

Simpleks metod

- Simpleks metod je originalno osmišljen kao procedura za rešavanje problema linearnog programiranja
- U modernim alatima za automatsko rezonovanje se često koristi kao procedura za ispitivanje zadovoljivosti konjunkcije linearnih ograničenja nad poljem racionalnih brojeva

Simpleks metod

Simpleks metod

- Pretpostavimo da imamo konjunkciju linearnih ograničenja $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \bowtie b_i$, gde je $\bowtie \in \{\leq, \geq\}$, $i \in 1 \ldots m$
- Uvodimo nove konstante $s_1, s_2, \ldots, s_m$, a originalni skup ograničenja transformišemo u sledeća dva skupa:
  - $s_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n$ (tablo)
  - $s_i \bowtie b_i$ (granična ograničenja)
- Tablo čine jednakosti kojima se neke nepoznate (inicijalno $s_1, \ldots, s_m$) izražavaju preko ostalih nepoznatih (inicijalno $x_1, \ldots x_n$)
  - nepoznate koje se izražavaju u jednakostima se nazivaju bazne nepoznate
  - nepoznate preko kojih izražavamo bazne nepoznate se nazivaju ne-bazne nepoznate
- Tokom rada algoritma, skupovi baznih i ne-baznih nepoznatih se mogu menjati (ali uvek ostaju disjunktni).

Simpleks metod

Simpleks metod - inicijalizacija

- Svakoj nepoznatoj y se pridružuje vrednost $\beta(y)$ iz skupa racionalnih brojeva
- Takođe, svakoj nepoznatoj y se pridružuju njena donja i gornja granica $l(y)$ i $u(y)$
- Inicijalno, donja granica svih nepoznatih je $-\infty$, a gornja $+\infty$
- Na osnovu graničnih ograničenja se ove granice ažuriraju (npr. ako imamo ograničenje $y \leq 5$, tada $u(y)$ postavljamo na 5)
- Nakon toga vrednost svih ne-baznih nepoznatih postavljamo na vrednost neke od njihovih konačnih granica, ili na 0 ako su obe granice beskonačne
- Vrednost $\beta(y)$ bazne nepoznate y se izračunava na osnovu vrednosti ne-baznih nepoznatih i odgovarajuće relacije u tablou

Primedba

Primetimo da nakon ove inicijalizacije vrednosti svih ne-baznih nepoznatih zadovoljavaju svoja granična ograničenja, dok za bazne nepoznate to ne mora da važi.

Simpleks metod

Simpleks metod - algoritam

Pretpostavimo da je unapred zadat potpuni poredak $\prec$ među nepoznatima. Označimo sa $a(x, y)$ koeficient uz ne-baznu nepoznatu x u trenutnom stanju tabloa u jednačini kojom se izražava bazna nepoznata y. Algoritam se izvršava u sledećoj petlji:

- ako za sve bazne nepoznate važi $l(y) \leq \beta(y) \leq u(y)$, tada vratiti rezultat: zadovoljivo
- u suprotnom, neka je y najmanja bazna nepoznata (u poretku $\prec$) takva da ne zadovoljava svoja granična ograničenja (npr. neka je $\beta(y) > u(y)$)
- neka je x najmanja ne-bazna nepoznata (u poretku $\prec$) takva da važi $\beta(x) > l(x)$ (ako je $a(x, y) > 0$), odnosno $\beta(x) < u(x)$ (ako je $a(x, y) < 0$)
- ako ne postoji takvo x, tada vratiti rezultat: nezadovoljivo
- u suprotnom, iz jednačine kojom se izražava y u tablou izraziti x, a zatim u svim drugim jednačinama zameniti x dobijenom desnom stranom
- na ovaj način, y postaje ne-bazna nepoznata, a x postaje bazna nepoznata (ovo je poznato i kao pivotiranje)
- nakon toga, ne-baznoj nepoznatoj y postaviti vrednost na $u(y)$
- zatim ažurirati vrednosti svih baznih nepoznatih na osnovu ove promene
- vratiti se na početak petlje i ponoviti postupak

Simpleks metod

Ograničenja $<, >, =, \neq$

- Simpleks algoritam radi samo sa relacijama $\leq, \geq$
- Jednakost $u = c$ se može zameniti sa $u \leq c$ i $u \geq c$
- Stroga nejednakost $u < c$ se može zameniti sa $u \leq c - \varepsilon$, gde je $\varepsilon > 0$ dovoljno mala pozitivna vrednost (slično za $u > c$)
- Različitost $u \neq c$ se može zameniti disjunkcijom $u < c \vee u > c$, tj. razmatraju se dva podproblema

Simpleks metod

Celobrojna ograničenja

- Pretpostavimo da za neke nepoznate dodatno zahtevamo da moraju imati celobrojne vrednosti
- Najpre se razmatra racionalna relaksacija ovog problema, tj. uslovi celobrojnosti se ignorišu i traži se bilo kakvo racionalno rešenje
- Ako je relaksacija problema nezadovoljiva, tada je nezadovoljiv i polazni problem
- U suprotnom, za svaku nepoznatu y za koju se zahteva da buda celobrojna, proveravamo da li je dobijena vrednost $\beta(y)$ zaista ceo broj
- ako je taj uslov ispunjen za svaku takvu promenljivu, tada je polazni problem zadovoljiv
- u suprotnom, razmatramo dva podproblema:
  - prvi uz dodatno ograničenje $y \leq \lfloor \beta(y) \rfloor$
  - drugi uz dodatno ograničenje $y \geq \lceil \beta(y) \rceil$
- Ako je bilo koji od ova dva problema zadovoljiv, zadovoljiv je i polazni problem
- Ova tehnika poznata je i kao tehnika grananja sa ograničavanjem (engl. branch-and-bound)
- Tehnika se može kombinovati sa raznim tehnikama zasnovanim na ravnima odsecanja (engl. cutting plane), radi brže konvergencije

Simpleks metod

Simpleks metod

- Složenost simpleks metoda je u najgorem slučaju eksponencijalna
- Ipak, u praksi često daje dobre rezultate
- Primenjiva i u racionalnom i u celobrojnom slučaju (uz dodatne tehnike)
- Poredak $\prec$ je bitan da bi se obezbedilo zaustavljanje
- Dobar izbor poretka može u značajnoj meri da ubrza konvergenciju
- Dobra strana algoritma je inkrementalnost: ako dodamo još neka granična ograničenja naknadno, možemo prosto ažurirati granice i ponovo pokrenuti algoritam

Pregled

SMT problem i SMT rešavači

SMT problem

- SMT problem (engl. Satisfiability Modulo Theory) za teoriju $\mathcal{T}$ je problem ispitivanja $\mathcal{T}$-zadovoljivosti date formule F
- Odlučivost SMT problema zavisi od izbora teorije $\mathcal{T}$
- Ispitivanje valjanosti formule F u teoriji se svodi na SMT problem za formulu $\neg F$ u toj teoriji
- Za pojedine teorije, SMT problem je odlučiv samo za neke fragmente (formule određenog oblika)

SMT rešavači

- Softverski alati koji implementiraju procedure odlučivanja za odlučive SMT probleme zovu se SMT rešavači
- Relativno nova tehnologija (početak 21. veka)
- SAT tehnologija + instanciranje kvantifikatora + bazne procedure odlučivanja (lenji pristup)
- Primene: verifikacija softvera i hardvera, problemi planiranja, problemi zadovoljavanja ograničenja...

Višesortna logika prvog reda

Motivacija

- Uobičajena definicija logike prvog reda podrazumeva jedinstven domen (univerzum) iz koga se uzimaju vrednosti kojima se interpretiraju svi termovi
- Dakle, svi izrazi su ili termovi ili formule, pri čemu se svi termovi interpretiraju elementima iz tog jedinstvenog domena, dok se formule interpretiraju kao tačne ili netačne
- Ovakva definicija onemogućava razlikovanje tipova
- U mnogim primenama, poželjno je razlikovati tipove (npr. ako semantiku nekog programa opisujemo u okviru logike prvog reda, želimo da razlikujemo npr. izraze tipa `int` od izraza tipa `double`).
- Dakle, poželjno je termove razlikovati po sortama, pri čemu za svaku sortu termova postoji poseban domen iz koga se uzimaju vrednosti
- Ovakav logički okvir se naziva višesortna logika prvog reda
- Naročito se razmatra u kontekstu SMT problema

Sintaksa

Signatura $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, r)$

- Skup sorti $\mathcal{S}$ (među kojima je i `Bool`)
- Skup funkcijskih simbola $\mathcal{F}$ (među kojima su i $\top$, $\bot$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$ ...)
- Funkcija ranga $r : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{S}^* \times \mathcal{S}$
- $r(f) = [s_1, \ldots, s_n] \longrightarrow s$ ($s_1, \ldots, s_n$ su sorte argumenata, a s je povratna sorta)
- $r(a) = [\,] \longrightarrow s$ (a je simbol konstante sorte s)
- Za svaku sortu $s \in \mathcal{S}$, skup promenljivih V^s

Izrazi

- Svaki izraz e ima svoju sortu s
- Simbol konstante a ranga $[\,] \longrightarrow s$ je izraz sorte s
- Promenljiva $x \in V^s$ je izraz sorte s
- Ako je t_i izraz sorte s_i $(i = 1, \ldots, n)$ i $r(f) = [s_1, \ldots, s_n] \longrightarrow s$, tada je $f(t_1, \ldots, t_n)$ izraz sorte s
- Izraze sorte `Bool` zovemo formulama, a ostale izraze termovima
- Iskazni simboli imaju uobičajene rangove: $r(\bot) = r(\top) = [\,] \longrightarrow \texttt{Bool}$, $r(\neg) = [\texttt{Bool}] \longrightarrow \texttt{Bool}$, $r(\wedge) = [\texttt{Bool}, \texttt{Bool}] \longrightarrow \texttt{Bool}$, ...
- Simbol jednakosti: $r(=_s) = [s, s] \longrightarrow \texttt{Bool}$ za svaku sortu $s \in \mathcal{S}$
- Promenljive se u formulama mogu kvantifikovati: $\forall x : \sigma.F$ ili $\exists x : \sigma.F$, gde je x promenljiva sorte σ, a F je formula

Semantika

$\mathcal{L}$-struktura $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \_^{\mathcal{M}})$

- $\mathcal{D} = \{D^s \mid s \in \mathcal{S}\}$: skup domena (za svaku sortu s po jedan)
- $D^{\texttt{Bool}} = \{0, 1\}$: domen sorte `Bool` je uvek $\{0, 1\}$
- $a^{\mathcal{M}} \in D^s$ $(r(a) = [\,] \longrightarrow s)$: konstanta sorte s uzima vrednost iz D^s
- $f^{\mathcal{M}} : D^{s_1} \times \ldots \times D^{s_n} \longrightarrow D^s$ $(r(f) = [s_1, \ldots, s_n] \longrightarrow s)$
- Uobičajeno značenje iskaznih simbola: $\bot^{\mathcal{M}} = 0$, $\top^{\mathcal{M}} = 1$, $\neg^{\mathcal{M}}(x) = 1$ akko je $x = 0$, $\wedge^{\mathcal{M}}(x, y) = 1$ akko $x = 1$ i $y = 1$, ...
- $=_s^{\mathcal{M}}(x, y) = 1$ akko su x i y isti element skupa D^s

Interpretacija

- Valuacija $v : V^s \longrightarrow D^s$ (za svako $s \in \mathcal{S}$)
- $x \in V^s$: $I_v^{\mathcal{M}}(x) = v(x)$
- $r(a) = [\,] \longrightarrow s$: $I_v^{\mathcal{M}}(a) = a^{\mathcal{M}}$
- $r(f) = [s_1, \ldots, s_n] \longrightarrow s$: $I_v^{\mathcal{L}}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{M}}(I_v^{\mathcal{L}}(t_1), \ldots, I_v^{\mathcal{L}}(t_n))$
- $I_v^{\mathcal{M}}(\forall x : \sigma.F) = 1$ akko $I_{v'}^{\mathcal{M}}(F) = 1$ za svako v' $(v'(y) = v(y)$ za $y \neq x)$
- $I_v^{\mathcal{M}}(\exists x : \sigma.F) = 1$ akko $I_{v'}^{\mathcal{M}}(F) = 1$ za neko v' $(v'(y) = v(y)$ za $y \neq x)$
- Interpretacija zatvorenih formula (rečenica) ne zavisi od v $(I_v^{\mathcal{M}}(F) = I^{\mathcal{M}}(F))$

Semantika – nastavak

Osnovne semantičke pojmove definišemo na uobičajen način

- $\mathcal{M} \models F$: zatvorena formula F je tačna u $\mathcal{L}$-strukturi $\mathcal{M}$ ($I^{\mathcal{M}}(F) = 1$)
- Zadovoljiva formula: postoji $\mathcal{L}$-struktura $\mathcal{M}$ takva da je $\mathcal{M} \models F$
- $\models F$: valjana formula (tačna u svim $\mathcal{L}$-strukturama)
- $\Delta \models F$: logička posledica (tačna kad god su tačne sve formule iz Δ)
- $F_1 \equiv F_2$: logička ekvivalencija ($F_1 \models F_2$ i $F_2 \models F_1$)
- $F \models \bot$: nezadovoljiva (negacija $\neg F$ je valjana formula)

Napomene

Napomene

- Višesortna logika tretira sve simbole na uniforman način
- Sorta `Bool` je samo jedna od sorti (fiksiranog značenja)
- Predikatski simboli su prosto funkcijski simboli koji vraćaju `Bool`
- Iskazni simboli $\top$, $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, ... su samo funkcijski simboli nad `Bool` sortom i sa fiksiranim značenjem

Izražajnost

- Višesortna logika prvog reda nema veću izražajnost od uobičajene logike prvog reda bez sorti
- Za svaku $\mathcal{L}$-strukturu $\mathcal{M}$ (u smislu višesortne logike) smo u standardnoj logici prvog reda mogli uzeti strukturu čiji je univerzum unija domena svih sorti iz $\mathcal{L}$
- Postojanje više sorti se sada može simulirati dodatnim unarnim predikatskim simbolima p^s koji se interpretiraju kao odgovarajući podskupovi univerzuma koji odgovaraju domenima pojedinih sorti $s \in \mathcal{L}$
- Svrha višesortne logike je u nametanju strožih sintaksnih pravila koja omogućavaju razlikovanje tipova na sintaksnom nivou (ovo je analogno statički tipiziranim programskim jezicima).

EUF teorija

EUF teorija

- Equality with Uninterpreted Functions
- Nema drugih predikatskih simbola osim jednakosti (svi atomi su oblika $u = v$)
- Signatura može saržati proizvoljan broj sorti i funkcijskih simbola koji se mogu potpuno slobodno interpretirati (neinterpretirani simboli i sorte)
- Teorija nema aksioma (osim aksioma jednakosti)
- Modeli teorije su sve (normalne) interpretacije
- SMT problem za ovu teoriju je neodlučiv
- SMT problem za bazni fragment ove teorije (u oznaci QF_UF) je odlučiv
- Zadovoljivost konjunkcije baznih literala ove teorije je odlučiv u polinomskom vremenu (procedure zasnovane na kongruentnim zatvorenjima, poput Nelson-Openove procedure)

Realna aritmetika

Realna aritmetika

- Signatura: sorta `Real`, simboli $0, 1, +, \cdot, -, /, \leq$
- Aksiome: realna zatvorena polja
- Standardni model: struktura realnih brojeva $\mathbb{R}$
- Teorija je odlučiva
- Procedura odlučivanja: Cilindrična algebarska dekompozicija (CAD) (eliminacija kvantifikatora)
- Bazni linearni fragment (u oznaci QF_LRA)
- Problem ispitivanja zadovoljivosti konjunkcije linearnih baznih literala je odlučiv u polinomskom vremenu
- Neke od procedura odlučivanja (eksponencijalne složenosti) su Furije-Mockinova procedura (zasnovana na eliminaciji kvantifikatora) i Simpleks procedura

Celobrojna aritmetika

Celobrojna aritmetika

- Signatura: sorta `Int`, simboli $0, 1, +, \cdot, -, \leq$
- Standardni model: struktura celih brojeva $\mathbb{Z}$
- Teorija je neodlučiva
- Njen linearni fragment je odlučiv
- Bazni linearni fragment (QF_LIA)
- Problem ispitivanja zadovoljivosti konjunkcije linearnih baznih literala je odlučiv i NP-kompletan
- Procedure odlučivanja: simpleks + tehnike odsecanja

Teorija nizova

Teorija nizova

- Signatura: sorte `Index`, `Value` i `Array`, simboli
  - $\mathit{select} : [\texttt{Array}, \texttt{Index}] \longrightarrow \texttt{Value}$
  - $\mathit{store} : [\texttt{Array}, \texttt{Index}, \texttt{Value}] \longrightarrow \texttt{Array}$
- Aksiome:
  - $\forall x.\forall y.\forall z.\ \mathit{select}(\mathit{store}(x, y, z), y) = z$
  - $\forall x.\forall y_1.\forall y_2.\forall z.\ y_1 \neq y_2 \Rightarrow \mathit{select}(\mathit{store}(x, y_1, z), y_2) = \mathit{select}(x, y_2)$
  - $\forall x_1.\forall x_2.\ (\forall y.\ \mathit{select}(x_1, y) = \mathit{select}(x_2, y)) \Rightarrow x_1 = x_2$
- Teorija je neodlučiva u opštem slučaju
- Bazni fragment teorije (QF_AX) je odlučiv
- Problem ispitivanja zadovoljivosti konjunkcije baznih literala je NP-kompletan
- Procedure odlučivanja: kongruento zatvorenje + instanciranje aksioma

Teorija bitvektora

Teorija bitvektora

- Signatura: sorte $\texttt{BitVec}_n$ ($n \in \mathbb{N}$), simboli:
  - $bvnot_n, bvneg_n : [\texttt{BitVec}_n] \longrightarrow \texttt{BitVec}_n$
  - $bvadd_n, bvshl_n, \ldots : [\texttt{BitVec}_n, \texttt{BitVec}_n] \longrightarrow \texttt{BitVec}_n$
  - $bvult_n, bvslt_n, \ldots : [\texttt{BitVec}_n, \texttt{BitVec}_n] \longrightarrow \texttt{Bool}$
- Standardni model: hardverska aritmetika
- Teorija je odlučiva
- Bazni fragment QF_BV
- Problem ispitivanja zadovoljivosti konjunkcije baznih literala je NP-kompletan
- Procedure odlučivanja: svodjenje na SAT rastavljanjem na bitove (bit-blasting)

Teorija rekurzivnih (induktivnih) tipova podataka

Signatura

- skupa sorti koje predstavljaju rekurzivne tipove podataka
  - npr. *Nat* i *List*
- skupa konstruktora podataka za ove tipove, npr.:
  - $zero : [\,] \rightarrow Nat$, $succ : [Nat] \rightarrow Nat$,
  - $empty : [\,] \rightarrow List$, $cons : [Nat, List] \rightarrow List$
- skupa selektora podataka za ove tipove, npr.:
  - $pred : [Nat] \rightarrow Nat$
  - $head : [List] \rightarrow Nat$, $tail : [List] \rightarrow List$
- skupa testera za ove tipove, npr:
  - $is\_zero : [Nat] \rightarrow Bool$, $is\_succ : [Nat] \rightarrow Bool$
  - $is\_empty : [List] \rightarrow Bool$, $is\_cons : [List] \rightarrow Bool$

Teorija rekurzivnih (induktivnih) tipova podataka (2)

Aksiome

- različito konstruisani objekti su različiti, npr.:
  - $\forall x : Nat.\ zero \neq succ(x)$, $\forall x : Nat\ y : Nat.\ x \neq y \Rightarrow succ(x) \neq succ(y)$
  - $\forall l : List\ x : Nat.\ empty \neq cons(x, l)$,
    $\forall l_1 : List\ x_1 : Nat\ l_2 : List\ x_2 : Nat.\ l_1 \neq l_2 \vee x_1 \neq x_2 \Rightarrow cons(x_1, l_1) \neq cons(x_2, l_2)$
- aksiome za selektore, npr.:
  - $\forall x : Nat.\ pred(succ(x)) = x$
  - $\forall x : Nat\ l : List.\ head(cons(x, l)) = x$, $\forall x : Nat\ l : List.\ tail(cons(x, l)) = l$
- aksiome za testere, npr.:
  - $is\_zero(zero) = True$, $\forall x : Nat.\ is\_zero(succ(x)) = False$, $is\_succ(zero) = False$,
    $\forall x : Nat.\ is\_succ(succ(x)) = True$
  - $is\_empty(empty) = True$, $\forall x : Nat\ l : List.\ is\_empty(cons(x, l)) = False$,
    $is\_cons(empty) = False$, $\forall x : Nat\ l : List.\ is\_cons(cons(x, l)) = True$
- aksiomatske sheme indukcije (za svaku formulu ϕ), npr.:
  - $(\phi(zero) \wedge (\forall x : Nat.\ \phi(x) \Rightarrow \phi(succ(x)))) \Rightarrow (\forall x : Nat.\ \phi(x))$
  - $(\phi(empty) \wedge (\forall x : Nat\ l : List.\ \phi(l) \Rightarrow \phi(cons(x, l)))) \Rightarrow (\forall l : List.\ \phi(l))$

Teorija rekurzivnih (induktivnih) tipova podataka (3)

Odlučivost i procedure odlučivanja

- teorija je neodlučiva
- bazni fragment je odlučiv
- procedura odlučivanja: kongruentno zatvorenje + sistem pravila koji oponaša aksiome teorije

Kombinacije teorija

Teorija $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \ldots + \mathcal{T}_n$

Neka su date teorije $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$. $\ldots$, $\mathcal{T}_n$ nad signaturama Σ_1, Σ_2, $\ldots \Sigma_n$, respektivno. Kombinacija teorija $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \ldots + \mathcal{T}_n$ je teorija nad signaturom $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \ldots \cup \Sigma_n$, čiji se skup modela $\mathcal{M}$ sastoji iz svih struktura $\mathcal{D}$ takvih da je projekcija $\mathcal{D}_i$ te strukture na Σ_i model teorije $\mathcal{T}_i$.

Napomena

Ukoliko su teorije $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$ zadate skupovima aksioma $Ax(\mathcal{T}_1), \ldots, Ax(\mathcal{T}_n)$, tada će njihova kombinacija $\mathcal{T}$ biti upravo teorija zadata skupom aksioma $Ax(\mathcal{T}_1) \cup \ldots \cup Ax(\mathcal{T}_n)$.

Kombinacije teorija (2)

Kombinacije teorija u SMT-u

U SMT-u se razmatraju različite kombinacije ranije opisanih teorija:

- QF_UFLRA: kombinacija linearne realne aritmetike i EUF teorije
- QF_UFLIA: kombinacija linearne celobrojne aritmetike i EUF teorije
- QF_AUFLIA: kombinacija teorije nizova, linearne celobrojne aritmetike i EUF teorije
- QF_AUFBV: kombinacija teorije nizova, teorije bitvektora i EUF teorije
- ...

Kombinacije teorija (3)

Procedure odlučivanja za kombinacije teorija

- Pod određenim uslovima, procedure odlučivanja za kombinacije teorija se mogu dobiti kombinovanjem procedura odlučivanja za teorije koje se kombinuju
- Obično se zahteva da važe sledeći uslovi:
  - da su signature teorija koje se kombinuju međusobno disjunktne (do na simbol jednakosti i određeni skup deljenih konstanti)
  - da su teorije koje se kombinuju stabilno beskonačne
- Teorija $\mathcal{T}$ je stabilno beskonačna ako je svaka $\mathcal{T}$-zadovoljiva rečenica tačna u nekom beskonačnom modelu teorije $\mathcal{T}$
- Umesto stabilne beskonačnosti se ponekad razmatraju i nešto slabiji uslovi
- Postoji više shema za kombinovanje procedura odlučivanja:
  - Nelson-Openova shema kombinovanja
  - Odloženo kombinovanje teorija (engl. Delayed Theory Combination (DTC))

SMT rešavači

Lenji pristup

- Iskazna apstrakcija: (bazni) atomi prvog reda se zamenjuju iskaznim slovima
- SAT rešavač ispituje zadovoljivost dobijene iskazne formule
- Zadovoljavajuća iskazna valuacija određuje konjunkciju baznih literala
- Posebna procedura odlučivanja proverava zadovoljivost dobijene konjunkcije baznih literala u teoriji
- Rezultat: efikasnost pretrage SAT rešavača + procedure odlučivanja prilagođene teoriji
- ,,Lenja DNF transformacija”
- Kvantifikatori: skolemizacija (egzistencijalni) + instanciranje (univerzalni)
- Tretman kvantifikatora je najčešće nepotpun (primenjuju se razne heuristike)

CDCL($\mathcal{T}$)

CDCL($\mathcal{T}$) (Nievenhuis, Oliveras, Tineli (2006))

- Najčešće korišćena arhitektura zasnovana na lenjom pristupu
- CDCL zasnovan SAT rešavač + $\mathcal{T}$-rešavač
- SAT rešavač: inkrementalno konstruiše zadovoljavajuće iskazne valuacije
- $\mathcal{T}$-rešavač: ispituje zadovoljivost odgovarajuće konjunkcije literala prvog reda u teoriji $\mathcal{T}$ *u toku konstrukcije* zadovoljavajuće valuacije
- Mogućnost rezonovanja *unapred* u teoriji (teorijske propagacije)

CDCL($\mathcal{T}$)

CDCL(X) – sistem zasnovan na pravilima

- Implementira klasičan CDCL zasnovan SAT rešavač proširen dodatnim pravilima za rezonovanje u teoriji
- Stanje (F, M, C): F skup klauza, M je stek literala (parcijalna valuacija), C je konfliktni skup (ili *no_cflt* ako nema konflikta)
- Pravilo: definiše način promene stanja, kao i uslove pod kojima se može primeniti
- Grananje, jedinična propagacija, analiza konflikata i nehronološko vraćanje unazad
- Dodatno: teorijske propagacije i konflikti

Funkcionalnost $\mathcal{T}$-rešavača

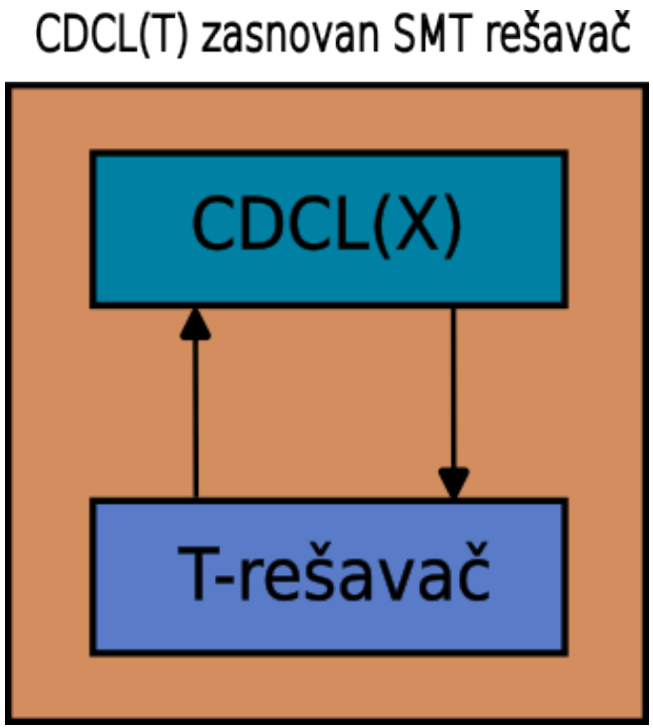
Obavezna funkcionalnost

- da može da utvrdi da li je konjunkcija literala na steku zadovoljiva u teoriji
- da može da konstruiše objašnjenje konflikta ($R \subset M$ takav da je $R \models_{\mathcal{T}} \bot$)

Poželjna funkcionalnost

- da može da vrši teorijske propagacije i generiše njihova objašnjenja ($R \subset M$ takav da je $R \models_{\mathcal{T}} l$, gde je l propagirani literal)
- inkrementalnost (mogućnost efikasne provere zadovoljivosti u slučaju dodavanja novih literala u konjunkciju bez pokretanja celog postupka iz početka)
- efikasna rekonstrukcija prethodnog stanja (za potrebe vraćanja unazad)

CDCL($\mathcal{T}$)



Struktura

- SMT rešavač ima modularnu strukturu, komponente su jasno odvojene i komuniciraju putem precizno definisanog interfejsa
- ovakva arhitektura omogućava da se $\mathcal{T}$-rešavač zameni $\mathcal{T}'$-rešavačem za neku drugu teoriju $\mathcal{T}'$ bez ikakvih promena na SAT rešavaču
- $CDCL(X) + \mathcal{T}$-rešavač $= CDCL(\mathcal{T})$

Primer interfejsa teorijskog rešavača

Interfejs procedure

- *newLevel*() – uspostavljanje novog nivoa odlučivanja
- *backtrack*(m) – vraćanje unazad na nivo m
- *assert*(l) – dodavanje literala l na stek
- *checkConflict*(E) – provera konflikta u teoriji
- *checkPropagate*(L) – detekcija teorijskih propagacija
- *explainLiteral*(l, E) – objašnjavanje propagiranog literala

SMT-LIB

SMT-LIB

- Poznati SMT rešavači: Z3, Yices, CVC, MathSAT, OpenSMT, BarcelogicTools
- Cilj SMT-LIB inicijative: bolja koordinacija u razvoju i lakše poređenje SMT rešavača
- Standard SMT-LIB (tekuća verzija 2.6): ulazno-izlazni jezik, logički okvir, teorije, kombinacije teorija
- Velika biblioteka instanci za testiranje i poređenje
- `http://smtlib.cs.uiowa.edu/`